



Aufgabe 1:

(9 Punkte)

Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:
und vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a) $f(x) = 2x \cdot e^{x^2} + x^2 - 1$ (3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)' e^{x^2} + 2x (e^{x^2})' + (x^2 - 1)' \\ &= 2e^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} + 2x \\ &= 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + 2x \\ &= (4x^2 + 2)e^{x^2} + 2x \end{aligned}$$

b) $g(x) = \frac{1}{e^{ax}} - \frac{1}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ (3)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{-ax})' - (x^{-1})' \\ &= -a e^{-ax} - (-x^{-2}) \\ &= -\frac{a}{e^{ax}} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

c) $h(x) = \frac{3x^2 + 5x + 10}{x-1}$ für $x \neq 1$ (3)

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(3x^2 + 5x + 10)'(x-1) - (3x^2 + 5x + 10)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(6x + 5)(x-1) - (3x^2 + 5x + 10) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 6x + 5x - 5 - 3x^2 - 5x - 10}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 6x - 15}{(x-1)^2} \end{aligned}$$



Aufgabe 2:

(9 Punkte)

Es sei da folgende Differential gegeben: $df(x, y) = \left(\frac{1}{2}xy^2 + 5\right)dx + (x^2y + 5)dy$

Prüfen Sie, ob dieses Differential weg-unabhängig ist. Integrieren Sie dazu das Differential vom Punkt (0,0) zum Punkt (2,3) auf zwei geeigneten, unterschiedlichen Wegen.

$$\begin{aligned} (1) \int_{(0,0)}^{(2,3)} df(x,y) &= \int_0^2 f_x(x,0) dx + \int_0^3 f_y(2,y) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x \cdot 0^2 + 5\right) dx + \int_0^3 (2^2 \cdot y + 5) dy \\ &= \int_0^2 (5) dx + \int_0^3 (4y + 5) dy \\ &= [5x]_0^2 + [2y^2 + 5y]_0^3 \\ &= 10 - 0 + 2 \cdot 9 + 15 - 0 \\ &= \underline{43} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{(0,0)}^{(2,3)} df(x,y) &= \int_0^3 f_y(0,y) dy + \int_0^2 f_x(x,3) dx \\ &= \int_0^3 (0^2 \cdot y + 5) dy + \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x \cdot 3^2 + 5\right) dx \\ &= \int_0^3 (5) dy + \int_0^2 \left(\frac{9}{2}x + 5\right) dx \\ &= [5y]_0^3 + \left[\frac{9}{4}x^2 + 5x\right]_0^2 \\ &= 15 - 0 + \frac{9}{4} \cdot 4 + 10 \\ &= \underline{34} \end{aligned}$$

Das Differential ist wegabhängig.



Aufgabe 3:

(9 Punkte)

a) Geben Sie die Definitionen von α , κ und C_p an.

(3)

b) Stellen Sie die $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$ mit Hilfe der Definitionen von α , κ und C_p dar. Nutzen Sie dazuden Zusammenhang $dv(T, P) = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP$ und gehen Sie vonkonstantem Volumen aus (d.h. $dv(T, P) = 0$).

(6)

$$a) \alpha := \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P ; \kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T ; C_p := \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$$

$$b) dv(T, P) = 0 = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP \quad | - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT \quad (\text{gesucht: } \frac{dP}{dT})$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP = - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT \quad | : \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

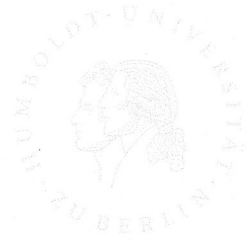
$$dP = - \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T} dT \quad | : dT$$

$$\frac{dP}{dT} = - \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T}$$

Definition
von α, κ

$$= - \frac{\alpha v}{-\kappa v} = \frac{\alpha}{\kappa}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{\alpha}{\kappa}$$

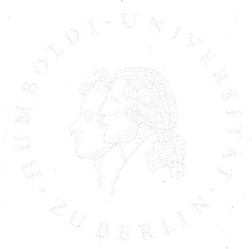
**Aufgabe 4:**

(8 Punkte)

- a) Stellen Sie dU als Differential der zwei Variablen P und T (d.h. $dU(P,T)$) in allgemeiner Form und als Funktion der thermodynamischen Größen v , P , T , S , α , κ und C_p dar. (4)
- b) Stellen analog dG als Differential der zwei Variablen P und T (d.h. $dG(P,T)$) dar. (4)

$$\begin{aligned} \text{a) } dU(P, T) &= \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT \\ dU(P, T) &= (P\kappa V - T\alpha V) dP + (C_p - P V \alpha) dT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } dG(P, T) &= \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P dT \\ dG(P, T) &= (v) dP + (-s) dT \end{aligned}$$



Aufgabe 5:

(9 Punkte)

Gegeben sei die folgende Statistik eines Würfelexperiments (Stichprobe) eines vierseitigen Würfels. Die Anzahl der Würfe beträgt $n = 40$.

x_i	1	2	3	4
$P_a(x_i)$	8	10	8	14

- a) Nennen Sie die Formeln des 0. Moments, des 1. Anfangsmoments und des 2. Zentralmoments. (3)
- b) Bestimmen Sie das 1. Anfangsmoment und beschreiben Sie, was diese Größe in diesem Experiment darstellt. Bestimmen Sie hierzu zunächst die relativen Wahrscheinlichkeiten $P(x_i)$. (4)
- c) Warum ist das 0. Moment immer 1? (2)

a)
$$E_c^{(0)}(x_i) = \sum_{i=1}^4 P(x_i) = 1$$

$$E_0^{(1)}(x_i) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(x_i)$$

$$E_\mu^{(2)}(x_i) = \sum_{i=1}^4 (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$$

b)

x_i	1	2	3	4
$P_a(x_i)$	8	10	8	14
$P(x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$

$$E_0^{(1)} = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(x_i)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{7}{20}$$

$$= \frac{4 + 10 + 12 + 28}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10} = 2,7$$

$$E_0^{(1)} = 2,7 = \mu$$

Das erste Anfangsmoment stellt den Erwartungswert μ dar.

- c) Beim 0. Moment handelt es sich um die Summe der relativen Wahrscheinlichkeiten und da diese auf 1 normiert sind, wird die Summe $E_c^{(0)}$ immer 1.



Aufgabe 6:

(8 Punkte)

- a) Nennen Sie die Formel des Boltzmann'schen e-Satzes für das Verhältnis zweier Energiezustände ε_i und ε_j . (1)
- b) Sei eine Temperatur von $T = 300 \text{ K}$ und eine Energiedifferenz $\Delta E = (\varepsilon_i - \varepsilon_j) = 300k_b$ (k_b ist die Boltzmann-Konstante) gegeben. Bestimmen sie das Verhältnis von ε_i zu ε_j . (2)
- c) Bestimmen Sie dasselbe Verhältnis für $\Delta E = (\varepsilon_i - \varepsilon_j) = 0$. (2)
- d) Bei einer festen Temperatur wurde das Verhältnis $p(\varepsilon_1)/p(\varepsilon_0) = 0,2$ festgestellt. Wenn sich 3200 Moleküle im Grundzustand ε_0 befinden, wie viele Moleküle liegen dann im angeregten Zustand ε_1 vor? (3)

$$a) \frac{p(\varepsilon_i)}{p(\varepsilon_j)} = e^{\frac{-(\varepsilon_i - \varepsilon_j)}{k_b T}}$$

$$b) \frac{p(\varepsilon_i)}{p(\varepsilon_j)} = e^{\frac{-300 \cdot k_b}{k_b \cdot 300}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \text{Das Verhältnis beträgt } \frac{1}{e}.$$

$$c) \frac{p(\varepsilon_i)}{p(\varepsilon_j)} = e^{\frac{0}{k_b T}} = e^0 = 1 \quad \text{Das Verhältnis beträgt } 1.$$

$$d) \frac{p(\varepsilon_1)}{p(\varepsilon_0)} = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N}{N_0} = \frac{N_1}{N_0}$$

$$\Rightarrow N_1 = 0,2 \cdot N_0$$

$$N_1 = 0,2 \cdot 3200 = \underline{640}$$

Es befinden sich 640 Moleküle im angeregten Zustand.