Aufgabe 1: (9 Punkte)

Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:
und vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a) $f(x) = 2x \cdot e^{x^2} + x^2 - 1$ (3)

$$f'(x) = (2x)' e^{x^2} + 2x\left(e^{x^2}\right)' + (x^2-1)'$$
$$= 2e^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} + 2x$$
$$= 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + 2x$$
$$= (4x^2+2)e^{x^2} + 2x$$

b) $g(x) = \frac{1}{e^{ax}} - \frac{1}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ (3)

$$g'(x) = \left(e^{-ax}\right)' - \left(x^{-1}\right)'$$
$$= -a\,e^{-ax} - (-x^{-2})$$
$$= -\frac{a}{e^{-ax}} + \frac{1}{x^2}$$

c) $h(x) = \frac{3x^2+5x+10}{x-1}$ für $x \neq 1$ (3)

$$h'(x) = \frac{(3x^2+5x+10)'(x-1) - (3x^2+5x+10)(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(6x+5)(x-1) - (3x^2+5x+10)\cdot 1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{6x^2-6x+5x-5-3x^2-5x-10}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{3x^2-6x-15}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Es sei da folgende Differential gegeben: $df(x,y) = (\frac{1}{2}xy^2+5)dx+(x^2y+5)dy$

Prüfen Sie, ob dieses Differential weg-unabhängig ist. Integrieren Sie dazu das Differential vom Punkt (0,0) zum Punkt (2,3) auf zwei geeigneten, unterschiedlichen Wegen.

(1) $\int_{(0,0)}^{(2,3)} df(x,y) = \int_0^2 f_x(x,0)\,dx + \int_0^3 f_y(2,y)\,dy$

$= \int_0^2 (\frac{1}{2}x\cdot 0^2+5)\,dx + \int_0^3 (2^2\cdot y+5)\,dy$

$= \int_0^2 (5)\,dx + \int_0^3 (4y+5)\,dy$

$= [5x]_0^2 + [2y^2+5y]_0^3$

$= 10-0+2\cdot 9+15-0$

$= 43$

(2) $\int_{(0,0)}^{(2,3)} df(x,y) = \int_0^3 f_y(0,y)\,dy + \int_0^2 f_x(x,3)\,dx$

$= \int_0^3 (0^2\cdot y+5)\,dy + \int_0^2 (\frac{1}{2}x\cdot 3^2+5)\,dx$

$= \int_0^3 (5)\,dy + \int_0^2 (\frac{9}{2}x+5)\,dx$

$= [5y]_0^3 + [\frac{9}{4}x^2+5x]_0^2$

$= 15-0+\frac{9}{4}\cdot 4+10$

$= 34$

Das Differential ist wegabhängig.

Aufgabe 3: (9 Punkte)

a) Geben Sie die Definitionen von α, κ und C_p an. (3)

b) Stellen Sie die $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$ mit Hilfe der Definitionen von α, κ und C_p dar. Nutzen Sie dazu

den Zusammenhang $dv(T,P) = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP$ und gehen Sie von

konstantem Volumen aus (d.h. dv(T,P) = 0). (6)

a) $\alpha := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$; $\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$; $C_P := \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$

b) $dv(T,P) = 0 = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP \quad \Big| -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$ (Gesucht: $\frac{dP}{dT}$)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT \quad \Big| : \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

$$dP = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} dT \quad \Big| : dT$$

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \underset{\text{von } \alpha, \kappa}{\overset{\text{Definition}}{=}} -\frac{\alpha V}{-\kappa V} = \frac{\alpha}{\kappa}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha}{\kappa}$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

a) Stellen Sie dU als Differential der zwei Variablen P und T (d.h. dU(P,T)) in allgemeiner Form und als Funktion der thermodynamischen Größen v, P, T, S, α, κ und C_p dar. (4)

b) Stellen analog dG als Differential der zwei Variabel P und T (d.h. dG(P,T)) dar. (4)

a) $dU(P,T) = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT$

$dU(P,T) = (p\kappa V - T\alpha V)\,dp + (C_p - pV\alpha)\,dT$

b) $dG(P,T) = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT$

$dG(P,T) = (V)\,dp + (-S)\,dT$

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Gegeben sei die folgende Statistik eines Würfelexperiments (Stichprobe) eines vierseitigen Würfels. Die Anzahl der Würfe beträgt n = 40.

x_i	1	2	3	4
$P_a(x_i)$	8	10	8	14

a) Nennen Sie die Formeln des 0. Moments, des 1. Anfangsmoments und des 2. Zentralmoments. (3)

b) Bestimmen Sie das 1. Anfangsmoment und beschreiben Sie, was diese Größe in diesem Experiment darstellt. Bestimmen Sie hierzu zunächst die relativen Wahrscheinlichkeiten $P(x_i)$. (4)

c) Warum ist das 0. Moment immer 1? (2)

a) $E_c^{(0)}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$

$E_0^{(1)}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$

$E_\mu^{(2)}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$

b)

x_i	1	2	3	4
$P_a(x_i)$	8	10	8	14
$P(x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$

$$E_0^{(1)} = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot P(x_i)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{7}{20}$$

$$= \frac{4+10+12+28}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10} = 2,7$$

$$\underline{E_0^{(1)} = 2,7 = \mu}$$

Das erste Anfangsmoment stellt den Erwartungswert μ dar.

c) Beim 0. Moment handelt es sich um die Summe der relativen Wahrscheinlichkeiten und da diese auf 1 normiert sind, wird die Summe $E_c^{(0)}$ immer 1.

Aufgabe 6: (8 Punkte)

a) Nennen Sie die Formel des Boltzmann'schen e-Satzes für das Verhältnis zweier Energiezustände ε_i und ε_j. (1)

b) Sei eine Temperatur von T = 300 K und eine Energiedifferenz $\Delta E = (\varepsilon_i - \varepsilon_j) = 300k_b$ (k_b ist die Boltzmann-Konstante) gegeben. Bestimmen sie das Verhältnis von ε_i zu ε_j. (2)

c) Bestimmen Sie dasselbe Verhältnis für $\Delta E = (\varepsilon_i - \varepsilon_j) = 0$. (2)

d) Bei einer festen Temperatur wurde das Verhältnis $p(\varepsilon_1)/p(\varepsilon_0) = 0{,}2$ festgestellt. Wenn sich 3200 Moleküle im Grundzustand ε_0 befinden, wie viele Moleküle liegen dann im angeregten Zustand ε_1 vor? (3)

a) $\frac{p(\varepsilon_i)}{p(\varepsilon_j)} = e^{-\frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_j)}{k_b T}}$

b) $\frac{p(\varepsilon_i)}{p(\varepsilon_j)} = e^{-\frac{300 \cdot k_b}{k_b \cdot 300}} = e^{-1} = \underline{\frac{1}{e}}$ Das Verhältnis beträgt $\frac{1}{e}$.

c) $\frac{p(\varepsilon_i)}{p(\varepsilon_j)} = e^{-\frac{0}{k_b T}} = e^{0} = \underline{1}$ Das Verhältnis beträgt 1.

d) $\frac{p(\varepsilon_1)}{p(\varepsilon_0)} = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N}{N_0} = \frac{N_1}{N_0}$

$\Rightarrow N_1 = 0{,}2 \cdot N_0$

$N_1 = 0{,}2 \cdot 3200 = \underline{640}$

Es befinden sich 640 Moleküle im angeregten Zustand.